数理解析研究所講究録
163巻 1972年 106-122

粘性流体中の液滴の変形
—— Poiseuille 流中の軸対称変形

慶大物理 松信 八十男

§1. 序

粘性流体中をこれと混ざり合わない別の流体の塊り(一般には変形性の物体で気泡や液滴はその特別の場合)が定常運動をするとき，球とは異なる形をとる。々種の流体の物理的性質と無限遠方での流れの条件によってどのような形になるかは流体力学の立場から非常に興味のある問題であると同時に，混相流というかなり広い応用性をもった境界領域的な問題の一部でもあり，最近いろいろの分野から注目されるようになった。

ここでは，慣性の効果を無視しPoiseuille流中に浮遊する液滴の定常な軸対称変形を議論する。液滴の形は球に近いと仮定し，球形からのずれの1次の項まで厳密に考慮する。その際，Poiseuille流の圧力勾配および表面張力を含む2つのパラメータが重要な働きをするが，これらが変形に及ぼす効

果についても検討する。なお，ここでは壁面は液滴から十分離れているとしてその影響は無視する。

従来，Stokes 近似を用いて液滴の形を推定する計算がいくつか行なわれているが，その方法は Taylor[1,2] がはじめて考案したものである。すなわち，液滴は完全な球であるとし，液滴の表面で運動学的な境界条件の他に接線応力が連続であるという条件を用いて液滴の内外の流れの場を決定したのち，表面張力を含む Laplace の条件に合致するように液滴の形を修正するのである。このようにして Taylor は hyperbolic flow および Couette 流による変形を，松信[3] と Hetsroni ら[4] は Poiseuille 流による変形を計算した。とくに松信は無限遠での速度分布が任意である場合に，液滴の変形を決定する方法を定式化した。

しかし，上述の方法は微小変形の線形理論のわく組の中で Stokes 方程式の解を与えるとは言い難い。なぜなら，液滴の形を修正したために Stokes 流にどの程度のはね返りがあるかはまったく評価していないからである。この点を明らかにするためには，初めから液滴は変形しているとして，すべての境界条件を平等に考慮しなければならない。松信[5] は静止流体を定常運動する液滴をこのようにして議論したが，変形がゼロという結果が得られたに過ぎなかった。ここでは，

その延長として Poiseuille 流による液滴の変形を取り扱う。

§2. 軸対称流に対する Stokes 方程式の解

流れを記述するのに球極座標 (r, θ, ϕ) をとり，対称軸を $\theta = 0$ に一致させる。また軸対称流では Stokes の流れの関数 $\psi(r, \theta)$ が定義され，速度の r, θ 成分 v_r, v_θ は

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2.1}$$

で与えられる。さらに，Stokes 方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\xi^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]^2 \psi = 0, \quad \xi = \cos\theta \tag{2.2}$$

となる。以下，計算を簡単にし，現われるいろいろのパラメータの評価を容易にするために，すべての量を無次元化しよう。規準の長さ，速度および応力として a, U, $\mu U/a$ をそれぞれ選ぶことにする。ここで a は液滴と同体積の球の半径，U はある一定の速度，μ は液滴の外の流体の粘性率である。ψ は Ua^2 を規準の量として無次元化されているとすると，(2.1)，(2.2) はそのまま無次元の式となる。

軸方向 $(\theta = \pi)$ に重力が働いている場合も含めておくことが望ましい。重力の加速度 g は，外の流体の密度を ρ として

$$\lambda = \rho g a^2/\mu U \tag{2.3}$$

で定義される無次元量λで代用する。この他，$\hat{\rho}$，$\hat{\mu}$を液滴内の流体の密度および粘性率とすると

$$\varkappa = \rho/\hat{\rho} \quad , \quad \sigma = \mu/\hat{\mu} \tag{2.4}$$

も必要な無次元量である。以下，液滴内に関する量には ^ をつけ外部の量と区別する。

さて，液滴に固定された座標系に対し，われわれの問題に都合のよい (2.2) の解の一般形は，外部流体に対しては

$$\psi = \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{J}_n(\xi)\left(A_n r^n + B_n r^{-n+1} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+3}\right), \tag{2.5}$$

内部流体に対しては

$$\hat{\psi} = \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{J}_n(\xi)\left(\hat{A}_n r^n + \hat{C}_n r^{n+2}\right) \tag{2.6}$$

で与えられる。ここで，A_n, B_n, C_n, D_n および $\hat{A}_n, \hat{C}_n$ は定数で，$\mathcal{J}_n(\xi)$ は Gegenbauer の多項式である。$n \geq 2$ のとき周知の Legendre の多項式 $P_n(\xi)$ と

$$\mathcal{J}_n(\xi) = \int_{\xi}^{1} P_{n-1}(\xi)\,d\xi, = [(1-\xi^2)/n(n-1)]\,P'_{n-1}(\xi),$$
$$= (2n-1)^{-1}\left[P_{n-2}(\xi) - P_n(\xi)\right] \tag{2.7}$$

などの関係がある。

速度成分や圧力も (2.5)，(2.6) のように表わすと，

$$v_r = -\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(\xi)\left(A_n r^{n-2} + B_n r^{-n-1} + C_n r^n + D_n r^{-n+1}\right) \tag{2.8}$$

$$v_\theta = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\mathcal{J}_n(\xi)/\sin\theta\right]\left\{nA_n r^{n-2} - (n-1)B_n r^{-n-1} + (n+2)C_n r^n - (n-3)D_n r^{-n+1}\right\} \tag{2.9}$$

$$\hat{v}_r = -\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(\xi)\left(\hat{A}_n r^{n-2} + \hat{C}_n r^n\right) \tag{2.10}$$

$$\hat{v}_\theta = \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(\xi)/\sin\theta] \{ n\hat{A}_n r^{n-2} + (n+2)\hat{C}_n r^n \} \qquad (2.11)$$

$$p = -\lambda r \xi - 2\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(\xi) \left\{ \frac{2n+1}{n-1} C_n r^{n-1} + \frac{2n-3}{n} D_n r^{-n} \right\} \qquad (2.12)$$

$$\hat{p} = K - \frac{\lambda}{\kappa} r\xi - \frac{2}{\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \hat{C}_n r^{n-1} P_{n-1}(\xi) \qquad (2.13)$$

ここで，Kは定数である。応力の成分 p_{rr}，$p_{r\theta}$，$p_{\theta\theta}$ についても同様に表わすことができるがここでは省略する。

§3. 境界条件

さて，液滴の境界が

$$r = B(\xi) \equiv 1 + \varepsilon f(\xi) \qquad (3.1)$$

で与えられているとしよう。εはある微小量で，その2次以上は省略できるものと仮定する。この境界上で成り立つ条件は，$r = B$ で

$$v_\nu = \hat{v}_\nu = 0 \qquad (3.2a)$$

$$v_\tau = \hat{v}_\tau \qquad (3.2b)$$

$$p_{\nu\tau} = \hat{p}_{\nu\tau} \qquad (3.2c)$$

$$p_{\nu\nu} - \hat{p}_{\nu\nu} = \eta(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \qquad (3.2d)$$

ここで，下の添字 ν, τ は境界面に対する法線成分および接線成分を与えるもので，$p_{\nu\nu}$, $p_{\nu\tau}$ は応力の法線および接線成分である。また，$R_1^{-1} + R_2^{-1}$ は平均曲率であり，η は表面張力Tを含む無次元のパラメータで

$$\eta = T/\mu U \qquad (3.3)$$

で与えられる。最後の条件は Laplace の法則と呼ばれるものである。

つぎに無限遠の条件を考えよう。$r \to \infty$ で軸方向 $(\theta = 0)$ および軸に垂直な速度成分は $\alpha + \gamma r^2 \sin^2\theta$ および 0 にそれぞれ近づくとすると，

$$\left.\begin{aligned} v_r &\to (\alpha + \gamma r^2 \sin^2\theta)\cos\theta \\ v_\theta &\to -(\alpha + \gamma r^2 \sin^2\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

となる。α，γ は定数である。このような流れでは軸方向に圧力勾配

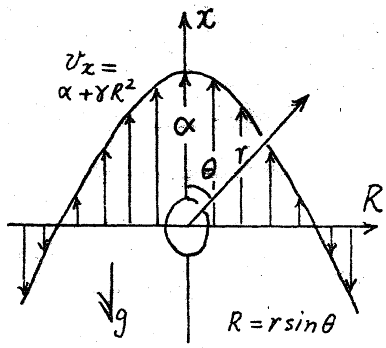
$$\partial p/\partial x \to -\lambda + 4\gamma \qquad (3.5)$$

が存在し，Poiseuille 流とよばれている。

§4. 第0近似

以下つぎのように解を分けておく：

$$\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon\psi^{(1)}, \quad \hat{\psi} = \hat{\psi}^{(0)} + \varepsilon\hat{\psi}^{(1)},$$
$$A_n = A_n^{(0)} + \varepsilon A_n^{(1)}, \quad B_n = B_n^{(0)} + \varepsilon B_n^{(1)},$$
$$\cdots\cdots \qquad (4.1)$$



液滴と流れの定義図

上の添字 (0) は球形の液滴に対する解を表わし，(1) のつく量の ε 倍は変形によって生ずる摂動量を与えるものとする。$\varepsilon = 0$ のとき，境界条件 (3.2a〜c) は，$r = 1$ で

$$v_r = \hat{v}_r = 0, \qquad v_\theta = \hat{v}_\theta, \quad p_{r\theta} = \hat{p}_{r\theta} \qquad (4.2)$$

の条件に帰着する。§2 の結果をこれらに代入し，$P_n(\xi)$，

$\vartheta_n(\xi)/\sin\theta$ の係数を比べると，$A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, \cdots$ についての連立方程式が得られるので，これを解いて，$B_n^{(0)}$, $D_n^{(0)}$, $\hat{A}_n^{(0)}$, $\hat{C}_n^{(0)}$ を $A_n^{(0)}$, $C_n^{(0)}$ を用いて表わすと

$$\left.\begin{aligned}
B_n^{(0)} &= \frac{1}{2(1+\sigma)}\{(2n-3)A_n^{(0)} + (2n-1-2\sigma)C_n^{(0)}\}\\
D_n^{(0)} &= -\frac{1}{2(1+\sigma)}\{(2n-1+2\sigma)A_n^{(0)} + (2n+1)C_n^{(0)}\}\\
\hat{A}_n^{(0)} &= -\hat{C}_n^{(0)} = -\frac{\sigma}{2(1+\sigma)}\{(2n-3)A_n^{(0)} + (2n+1)C_n^{(0)}\}
\end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

となる。これは，無限遠で軸対称の任意の速度分布をもつ流れの中に‘球形’の液滴が軸上に浮遊するばあいに成り立つ条件であって，軸上にないもっと一般的なものに対する条件の特別なものである[3)]。

無限遠での条件 (3.4) を満たすためには，

$$A_2^{(0)} = -\alpha, \quad C_2^{(0)} = (-2/5)\gamma, \quad A_4^{(0)} = (2/5)\gamma \quad (4.4)$$

とし，それ以外の $A_n^{(0)}$, $C_n^{(0)}$ はすべて 0 とればよい。これらを (4.3) に代入すれば他の係数も求まる：

$$\left.\begin{aligned}
&B_2^{(0)} = -\frac{\alpha + (2\gamma/5)(3-2\sigma)}{2(1+\sigma)}, \quad D_2^{(0)} = \frac{(3+2\sigma)\alpha + 2\gamma}{2(1+\sigma)}\\
&\hat{A}_2^{(0)} = -\hat{C}_2^{(0)} = \frac{(\alpha+2\gamma)\sigma}{2(1+\sigma)}, \quad B_4^{(0)} = \frac{\gamma}{1+\sigma}\\
&D_4^{(0)} = -\frac{7+2\sigma}{5(1+\sigma)}\gamma, \quad \hat{A}_4^{(0)} = -\hat{C}_4^{(0)} = -\frac{\sigma\gamma}{1+\sigma}
\end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

(4.4) と (4.5) によって与えられる解は，すでに得られた非対称の速度分布に対する解の特別なものである[3)]。また，

$\gamma=0$ とすれば最も簡単な Rybczynski-Hadamard の解，すなわち，一様流中におかれた球形の液滴の内外の流れを表わすことは言うまでもない。

§5. 第1近似

変形によるψの変化を計算するためには，境界条件の受ける変化をまず導いておかなければならない。これは文献 5) に記されているのでここでは省略する。前節と同じように，(3.2a〜c) だけを考慮し，§2の結果を (4.1) のように分解したものをそれらに代入する。ただし，(3.1) の$f(\xi)$を

$$f(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty} s_n P_n(\xi)$$

または

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)t_n P_n(\xi) \qquad (5.1)$$

のように展開しておくのが便利である。ここで

$$s_n=(2n+1)t_n$$

である。さらに

$$f(\xi)\mathcal{J}_2(\xi)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{s_{n-2}}{2n-3}-\frac{s_n}{2n+1}\right)\mathcal{J}_n(\xi)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}n(n-1)(t_{n-2}-t_n)\mathcal{J}_n(\xi)$$

$$(1-\xi^2)f'(\xi)P_1(\xi)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\{(n-3)t_{n-2}+(n+1)t_n\}\mathcal{J}_n(\xi)$$

$$f(\xi)\mathcal{J}_4(\xi)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{8}n(n-1)\left\{\frac{5(n-3)(n-2)}{(2n-5)(2n-3)}t_{n-4}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-2)(n+5)}{(2n-5)(2n+1)}t_{n-2}-\frac{(n+1)(n-6)}{(2n-3)(2n+3)}t_n-\frac{5(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}t_{n+2}\right\}$$

などの恒等式を利用すれば，$B_n^{(1)}, D_n^{(1)}, \cdots$ を求めることができる。このとき，無限遠の条件 (3.4) から

$$A_n^{(1)} = C_n^{(1)} = 0 \quad (n \geq 2) \tag{5.2}$$

であることに注意を要する。結果は

$$B_n^{(1)} = \frac{n(n-1)}{(1+\sigma)^2} \sum_i{}' \left[\frac{1}{2} M_{n,i} + \frac{\sigma}{2n-1} N_{n,i} - \left\{ \frac{2n^2-4n+3}{2(2n-1)} + \frac{n(n-2)}{2n-1}\sigma \right\} \times L_{n,i} \right] t_i, \tag{5.3}$$

$$D_n^{(1)} = \frac{n(n-1)}{(1+\sigma)^2} \sum_i{}' \left[-\frac{1}{2} M_{n,i} - \frac{\sigma}{2n-1} N_{n,i} + \left\{ \frac{2n^2+1}{2(2n-1)} + \frac{n^2-1}{2n-1}\sigma \right\} L_{n,i} \right] t_i, \tag{5.4}$$

$$\hat{A}_n^{(1)} = \frac{n(n-1)\sigma}{(1+\sigma)^2} \sum_i{}' \left[-\frac{1}{2} M_{n,i} + \frac{1}{2n-1} N_{n,i} + \left\{ \frac{2n^2+1}{2(2n-1)} + \frac{n^2-1}{(2n-1)\sigma} \right\} L_{n,i} \right] t_i, \tag{5.5}$$

$$\hat{C}_n^{(1)} = \frac{n(n-1)\sigma}{(1+\sigma)^2} \sum_i{}' \left[\frac{1}{2} M_{n,i} - \frac{1}{2n-1} N_{n,i} - \left\{ \frac{2n^2-4n+3}{2(2n-1)} + \frac{n(n-2)}{(2n-1)\sigma} \right\} L_{n,i} \right] t_i \tag{5.6}$$

ここで，$\sum_i{}'$ は $i = n-4,\ n-2,\ n,\ n+2$ について和をとることを意味し，$L_{n,i},\ M_{n,i},\ N_{n,i}$ は次式で与えられる：

$$\left.\begin{aligned}
L_{n,n-4} &= -\frac{5\sigma}{4} \frac{(n-3)(n-2)}{(2n-5)(2n-3)}\gamma \\
L_{n,n-2} &= \sigma\left\{ \frac{\alpha}{2} + \frac{5(3n^2-7n-2)}{4(2n-5)(2n+1)}\gamma \right\} \\
L_{n,n} &= -\sigma\left\{ \frac{\alpha}{2} + \frac{5(3n^2+n-6)}{4(2n-3)(2n+3)}\gamma \right\} \\
L_{n,n+2} &= \frac{5\sigma}{4} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\gamma
\end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{n,n-4} &= \frac{35}{4}(1-\sigma)\frac{(n-3)(n-2)}{(2n-5)(2n-3)}\gamma \\
M_{n,n-2} &= -(1-\sigma)\left\{\frac{3}{2}\alpha + \frac{41n^2-117n+10}{4(2n-5)(2n+1)}\gamma\right\} \\
M_{n,n} &= (1-\sigma)\left\{\frac{3}{2}\alpha + \frac{41n^2+35n-66}{4(2n-3)(2n+3)}\gamma\right\} \\
M_{n,n+2} &= -\frac{35}{4}(1-\sigma)\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\gamma
\end{aligned}
\right\} \tag{5.8}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
N_{n,n-4} &= \frac{5}{8}\{(14n+23)-2(7n-20)\sigma\}\frac{(n-3)(n-2)}{(2n-5)(2n-3)}\gamma \\
N_{n,n-2} &= -\frac{3}{4}\{(2n+1)-2(n-2)\sigma\}\alpha \\
&\quad - \frac{5\{14n^3-43n^2-35n+94-2(7n^3-20n^2+11n-10)\sigma\}}{8(2n-5)(2n+1)}\gamma \\
N_{n,n} &= \frac{3}{4}\{-(2n-3)+2(n+1)\sigma\}\alpha \\
&\quad + \frac{5\{-(14n^3+n^2-79n-30)+2(7n^3-n^2-8n+12)\sigma\}}{8(2n-3)(2n+3)}\gamma \\
N_{n,n+2} &= \frac{5}{8}\{(14n-37)-2(7n+13)\sigma\}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\gamma
\end{aligned}
\right\} \tag{5.9}
$$

§6. 表面張力を含む境界条件

液滴が指定された微小な軸対称変形を受けるときの液滴の内外の流れの場が完全に決定された。このばあい，境界条件は (3.2a〜c) だけを考慮したが，残りの条件 (3.2d) について調べて見なければならない。すでに得られた結果を使って (3.2d) の左辺を書き換えると，$r=B(\xi)$ のとき

$$p_{\nu\nu} - \hat{p}_{\nu\nu} = K + \lambda(1-\kappa^{-1})P_1(\xi)$$

$$- \frac{1}{1+\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_{n-1}(\xi)}{n(n-1)} \{ (2n-3)[3+2(n^2-1)(1+\sigma)] A_n^{(0)}$$
$$+ (2n+1)[3+2n(n-2)(1+\sigma)] C_n^{(0)} \}$$
$$+ \varepsilon f(\xi) \{ \lambda(1-\frac{1}{\kappa}) P_1(\xi) - \frac{6(1-\sigma)}{1+\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(\xi)[(2n-3)A_n^{(0)}$$
$$+ (2n+1) C_n^{(0)}] \} + 2\varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(\xi) E_n^{(1)} \qquad (6.1)$$

ただし，

$$E_n^{(1)} = (n+1) B_n^{(1)} + \frac{n^2+n-3}{n} D_n^{(1)} + \frac{n-2}{\sigma} \hat{A}_n^{(1)}$$
$$+ \frac{n^2-3n-1}{\sigma(n-1)} \hat{C}_n^{(1)} \qquad (6.2)$$

とおいた。

一方，(3.2d) の右辺は

$$\eta(R_1^{-1}+R_2^{-1}) = 2\eta \{ 1 + (\varepsilon/2) \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2)(2n+1) t_n P_n(\xi) \} \qquad (6.3)$$

と展開できる。

Poiseuille 流の場合，(6.1) と (6,3) を等置して $P_n(\xi)$ の係数を比べるために，つぎの2つの恒等式を用意すれば十分である：

$$P_1(\xi) f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ n t_{n-1} + (n+1) t_{n+1} \} P_n(\xi),$$
$$P_3(\xi) f(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \frac{5(n-2)(n-1)n}{(2n-3)(2n-1)} t_{n-3}$$
$$+ \frac{3(n-1)n(n+1)}{(2n-3)(2n+3)} t_{n-1} + \frac{3n(n+1)(n+2)}{(2n-1)(2n+5)} t_{n+1}$$
$$+ \frac{5(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} t_{n+3} \} P_n(\xi)$$

ただし，$s_0 = 0$ に注意を要する。これらから次式を得る：

$P_0(\xi)$ の係数：

$$K + \varepsilon [\{ \lambda(1-\kappa^{-1}) + \frac{6(1-\sigma)}{1+\sigma}(\alpha+2\gamma) \} t_1 + \frac{12(1-\sigma)}{1+\sigma} \gamma t_3] = 2\eta \qquad (6.4)$$

$P_1(\xi)$ の係数:

$$\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)+\frac{3}{2}\,\frac{(3+2\sigma)\alpha+2\gamma}{1+\sigma}+\varepsilon\left[2\left\{\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)+\frac{6(1-\sigma)}{1+\sigma}(\alpha+2\gamma)\right\}t_2\right.$$
$$\left.-\frac{36}{7}\,\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\gamma\,(3t_2+4t_4)+2E_2^{(1)}\right]=0 \qquad (6.5)$$

$P_2(\xi)$ の係数:

$$\varepsilon\left[\left\{\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)+\frac{6(1-\sigma)}{1+\sigma}(\alpha+2\gamma)\right\}(2t_1+3t_3)-\frac{12(1-\sigma)}{1+\sigma}\gamma\left(\frac{9}{7}t_1+\frac{4}{3}t_3\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{50}{21}t_5\right)+2E_3^{(1)}\right]=20\,\varepsilon\eta t_2 \qquad (6.6)$$

$P_3(\xi)$ の係数:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{11+10\sigma}{1+\sigma}\gamma+\varepsilon\left[\left\{\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)+\frac{6(1-\sigma)}{1+\sigma}(\alpha+2\gamma)\right\}(3t_2+4t_4)\right.$$
$$\left.-\frac{12(1-\sigma)}{1+\sigma}\gamma\left(\frac{4}{3}t_2+\frac{18}{11}t_4+\frac{100}{33}t_6\right)+2E_4^{(1)}\right]=70\,\varepsilon\eta t_3 \qquad (6.7)$$

$P_n(\xi)$ の係数 $(n\geq 4)$:

$$\varepsilon\left[\left\{\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)+\frac{6(1-\sigma)}{1+\sigma}(\alpha+2\gamma)\right\}\{n t_{n-1}+(n+1)t_{n+1}\}\right.$$
$$-\frac{12(1-\sigma)}{1+\sigma}\gamma\left\{\frac{5(n-2)(n-1)n}{2(2n-3)(2n-1)}t_{n-3}+\frac{3(n-1)n(n+1)}{2(2n-3)(2n+3)}t_{n-1}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3n(n+1)(n+2)}{2(2n-1)(2n+5)}t_{n+1}+\frac{5(n+1)(n+2)(n+3)}{2(2n+3)(2n+5)}t_{n+3}\right\}+2E_{n+1}^{(1)}\right]$$
$$=(n-1)(n+2)(2n+1)\,\varepsilon\eta t_n \qquad (6.8)$$

展開式 (5.1) の係数のうち $s_1=3t_1$ は ε^2 の項を無視する限り液滴の形には関係ないので 0 とおくことができる。その他の係数 $t_2, t_3, \cdots$ は $O(1)$ の量と見られるので，(6.7) から

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\eta} \qquad (6.9)$$

とするのが適当である。ここで次の2つの場合を考えよう:

(A) $\gamma = O(1)$, $\eta = O(\varepsilon^{-1})$

(B) $\gamma = O(\varepsilon)$, $\eta = O(1)$

(A)の場合には (6.7)より

$$\varepsilon S_3 = -\frac{11+10\sigma}{20(1+\sigma)}\frac{\gamma}{\eta} \tag{6.10}$$

(6.6), (6.8) より

$$S_2 = S_4 = S_5 = \cdots = 0 \tag{6.11}$$

が得られ，これは Taylor 方式によって求められた結果と一致する。[3,4] また，(6.5)から

$$\lambda\left(\frac{1}{\kappa}-1\right) = \frac{3}{2}\frac{(3+2\sigma)\alpha+2\gamma}{1+\sigma} \tag{6.12}$$

となって、無次元の形の抵抗法則が得られる。これを α について解けば，液滴の移動速度を与えられた量から求めることもできる。これについては次節で検討しよう。流れの場は，(6.10), (6.11)を §4，§5 の結果に代入すれば得られるが，これはもちろん Taylor 方式による結果と $O(\varepsilon)$ だけ異なる。

(B)の場合を考えよう。$\gamma = O(\varepsilon)$ であるから (6.4)~(6.8) に現われる $\varepsilon\gamma$ のかかっている項はすべて無視できる。

$$E_n^{(1)} = \frac{\alpha}{4(2n-1)(1+\sigma)^2}\Big[(1+\sigma)\{2(n-1)(2n^3-2n^2+8n-15)\sigma + (4n^4-8n^3-16n^2+5n-9)\}t_{n-2} - \{4(n-1)(n+1)^2(n-3)\sigma^2 + (8n^4-16n^3+4n^2-77n+39)\sigma + (4n^4-8n^3+20n^2-18n-9)\}t_n\Big] + O(\gamma) \tag{6.13}$$

となるので，(6.4)~(6.7) はそれぞれ

$$K = 2\eta \tag{6.14}$$

$$\lambda\left(\frac{1}{\kappa}-1\right) = \frac{3}{2}\,\frac{(3+2\sigma)\alpha+2\gamma}{1+\sigma} + \frac{3(-3+\sigma-8\sigma^2)}{2(1+\sigma)^2}\varepsilon\alpha t_2 \tag{6.15}$$

$$3\varepsilon t_3\left\{\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) - \frac{2(1+\sigma+3\sigma^2)}{(1+\sigma)^2}\alpha\right\} = 20\,\varepsilon\eta t_2 \tag{6.16}$$

$$\varepsilon\left[3\left\{\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) + \frac{173+142\sigma}{14(1+\sigma)}\alpha\right\}t_2 + \left\{4\lambda\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) - \frac{3(145+273\sigma+212\sigma^2)}{14(1+\sigma)^2}\alpha\right\}t_4\right] = 70\,\varepsilon\eta t_3 + \frac{11+10\sigma}{2(1+\sigma)}\gamma \tag{6.17}$$

となる。(6.14) は K が液滴内外の圧力差に相当するので，静止する球形の液滴に対する Laplace の法則を表わしている。(6.15) は抵抗法則を与えるもので，変形のパラメータのうち εt_2 だけが抵抗に関係する。これはまた，α，γ，λ，κ，σ が与えられたとき，変形を決定する基礎の関係式である。これから εt_2 が定まれば以下の式を用いて順次 εt_3，εt_4，…… が求められるからである。

§7. 解の考察

実際問題として Poiseuille 流は円管内の流れとしてはじめて実現されるという立場で，(6.15) 以下によって与えられる結果の妥当性を調べておく必要があろう。円管の内半径 R_0 が液滴の相当半径 a に比べて十分大きいとして，壁面効果を無視したが，

$$\delta = \frac{a}{R_0} \tag{7.1}$$

の小ささと ε の小ささの比較が問題になる。

壁に固定した座標系で見れば，(3.4) で与えられる流れの軸上における最大速度は $-\gamma\delta^{-2}$ であり，液滴の移動速度は $-(\alpha+\gamma\delta^{-2})$ に等しい。液滴が変形しない場合に，壁面効果を考慮して液滴の移動速度を与える式はすでに Haberman と Sayre[6] によっておめられている。われわれの記号を使って書くと

$$-(\alpha+\gamma\delta^{-2})=\frac{2}{3}\lambda(1-\kappa^{-1})\frac{1}{K_1}\frac{1+\sigma}{3+2\sigma}-\gamma\delta^{-2}\frac{K_2}{K_1} \tag{7.2}$$

ここで，
$$K_1=\frac{1+O(\delta^5)}{1-2.1050\,\frac{3+2\sigma}{3(1+\sigma)}\delta+O(\delta^3)} \tag{7.3}$$

$$K_2=\frac{1-\frac{2}{3+2\sigma}\delta^2+O(\delta^5)}{1-2.1050\,\frac{3+2\sigma}{3(1+\sigma)}\delta+O(\delta^3)} \tag{7.4}$$

である。§2で述べた規準の速度として，半径 a の球形の液滴が静止流体中を重力の作用で定常運動する速度をとれば，

$$U=\frac{2}{3\mu}(\hat{\rho}-\rho)\frac{1+\sigma}{3+2\sigma}ga^2, \tag{7.5}$$

すなわち，無次元形にして

$$\lambda(\kappa^{-1}-1)=\frac{3(3+2\sigma)}{2(1+\sigma)} \tag{7.6}$$

となる。この関係および (7.3)，(7.4) を (7.2) に代入して簡単にすれば

$$\alpha=1-\frac{2\gamma}{3+2\sigma}-2.1050\,\frac{3+2\sigma}{3(1+\sigma)}\delta+O(\delta^3) \tag{7.7}$$

となる。

これから，δが十分小さければ　$\alpha-1=O(\gamma)$　となるが，(7.7)は液滴の変形を全く考慮していないので，αとγの正しい関係はわからない。しかし，§6で述べた(B)の場合，$\gamma=O(\varepsilon)$　となるので，たとえ変形を考慮しても

$$\alpha-1=O(\varepsilon) \tag{7.8}$$

となるであろう。(7.6)，(7,8)に注意すれば，(6.15)以下の式はもっと簡単になり，

$$\varepsilon t_2=\frac{(1+\sigma)\{(3+2\sigma)(\alpha-1)+2\gamma\}}{3-\sigma+8\sigma^2} \tag{7.9}$$

$$\varepsilon t_3=-\frac{40}{3}\eta\frac{(1+\sigma)^2}{13+19\sigma+18\sigma^2}\varepsilon t_2 \tag{7.10}$$

$$\varepsilon t_4=-\frac{14(1+\sigma)^2}{3(229+413\sigma+268\sigma^2)}\Big\{(7\gamma-30\varepsilon t_2)\frac{11+10\sigma}{14(1+\sigma)}+70\eta\varepsilon t_3\Big\} \tag{7.11}$$

....

(7.9)で　$\gamma=0$　とおいて得られる式は一様流中での液滴の変形に対応するもので，すでに得られた結果[5)]と一致する。

結論としていえることは，Taylor 流の方法で得られる結果は $\eta=O(\varepsilon^{-1})$，$\gamma=O(1)$　の場合にあてはまり，このとき，代表的速度として(7.5)を選べば，(6.12)　と　(7.6)から

$$\alpha=1-2\gamma/(3+2\sigma) \tag{7.12}$$

となって，液滴と一般流との相対速度（すなわち液滴が流れから取り残される速度）α は初めから与えられたパラメータ γ の値から求めることができる。(7.12) は $\delta \to 0$ のときの (7.7) の式と一致することに注意を要する。

一方，$\eta = O(1)$ で $\gamma = O(\varepsilon)$ の場合，相対速度 α は現在の結果から推定することはできない。したがって，変形は一義的に決定できない。これは多分，壁の影響を考慮して液滴の変形を議論すれば救うことができるであろう。

この計算を完成するに当って，東京大学理学部の今井功教授および今井研究室の方々から貴重な助言を賜わった。ここに謹んで感謝の意を表明する次第である。

文　　献

1) G. I. Taylor : Proc. Roy. Soc. (GB) A 138 (1932) 41.

2) G. I. Taylor : Proc. Roy. Soc. (GB) A 146 (1934) 501.

3) Y. Matunobu: J. Phys. Soc. Japan 29 (1970) 508.

4) G. Hetsroni and S. Haber : TNSD-P/209, Dept. of Nuclear Science, Technion - Israel Inst. Tech., Haifa (1969).

5) Y. Matunobu: J. Phys. Soc. Japan 21 (1966) 1596.

6) W. L. Haberman and R. M. Sayre : DTMB Rep. no. 1143 (1958).